

KESEIMBANGAN SISTEM PENDULUM TERBALIK BERODA SATU MENGGUNAKAN *SLIDING MODE CONTROL*

Yusie Rizal^{1,2}, Feriyadi², Ronny Mantala³

Department of Engineering Science, National Cheng Kung University, Taiwan¹

Jurusan Teknik Elektro, Politeknik Negeri Banjarmasin²

yusie.rizal@gmail.com

Jurusan Administrasi Bisnis, Politeknik Negeri Banjarmasin³

rmantala@gmail.com

ABSTRACT

This paper presents the balancing control of a system that so-called one-wheeled inverted pendulum system by using sliding mode control. This system consists of a wheel and a rod in which the wheel is actuated by dc motor to maintain the rod on its upright position. To measure each state, motor encoder and inertial measurement unit (IMU) are used to provide angular position of the wheel and angular position of the rod with respect to Z-axis, respectively. It is assumed that the system is unstable on its longitudinal direction (forward-and-backward) only, while the lateral direction (left-and-right) is assume to be stable. This control problem is challenging task because it is inherently unstable, nonlinear and underactuated system. From the simulation results, it is shown that sliding mode control can stabilize the one-wheeled inverted pendulum system.

Keywords: *sliding mode control, one-wheeled inverted pendulum, balancing system*

ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas keseimbangan sistem pendulum terbalik beroda satu atau dikenal dengan *one-wheeled inverted pendulum system* menggunakan *sliding mode control*. Sistem tersebut terdiri dari sebuah roda dengan pendulum pada bagian atasnya, dimana putaran roda digerakkan oleh motor dc dengan enkoder motor dan sensor IMU (*inertial measurement unit*) masing-masingnya digunakan sebagai umpan balik untuk mengukur putaran sudut motor dan sudut penyimpangan pendulum terhadap sumbu-Z. Sistem ini diasumsikan memiliki ketidakstabilan pada arah longitudinal (arah maju-mundur) sedangkan pada arah lateral (arah kiri-kanan) dianggap stabil. Persoalan kendali keseimbangan sistem ini cukup sulit disebabkan secara inheren sistem ini tidak stabil, nonlinier, dan *underactuated*. Dari hasil simulasi yang diperoleh dapat dibuktikan bahwa metode sistem kendali ini mampu mengendalikan sistem hingga keseimbangan sistem pendulum terbalik beroda satu bisa dicapai.

Kata Kunci: *sliding mode control, pendulum terbalik beroda satu, keseimbangan sistem*

I. PENDAHULUAN

Sistem pendulum terbalik (*inverted pendulum system*) merupakan persoalan umum yang sering digunakan untuk mendemonstrasikan penerapan sistem kendali untuk menstabilkan suatu sistem plant (sebagai objek yang dikendalikan). Dari sini kemudian muncul beragam varian dari sistem tersebut, mulai dari pendulum terbalik dengan kereta (*cart-inverted pendulum system*), pendulum terbalik beroda dua (*two-wheeled inverted pendulum system*), sistem pendulum terbalik beroda satu (*one-wheeled inverted pendulum system*), dan sebagainya. Sistem pendulum terbalik beroda satu dapat dianggap sebagai pengembangan dari sistem pendulum terbalik dengan kereta. Sistem ini diasumsikan mempunyai ketidakstabilan pada arah longitudinal (depan-belakang) dan diasumsikan stabil pada arah lateral (samping kiri-samping kanan).

1.1. Deskripsi Sistem

Sistem pendulum terbalik beroda satu ini terdiri dari sebuah roda dimana pada bagian atasnya terdapat sebuah pendulum. Sistem ini bisa digunakan sebagai model untuk *unicycle robot* (Ho et al., 2014) dimana pendulum tersebut dapat dianggap sebagai kerangka/struktur badan robot yang terhubung dengan roda. Oleh karenanya, sistem ini berbeda dibandingkan sistem pendulum terbalik dengan kereta (Nurmahaludin, 2012) dimana pada sistem tersebut terdapat bentuk koneksi (joint) antara kereta dan pendulum.

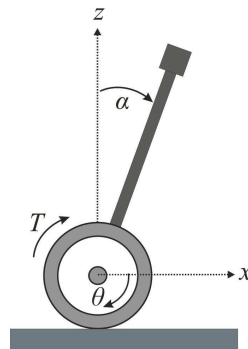
Sebuah sistem plant yang cukup kompleks biasanya perlu dilakukan penyederhanaan sistem (model) sedemikian rupa agar sistem tersebut bisa dibuat lebih sederhana. Konsekuensi dari penyederhanaan ini menyebabkan sistem tersebut tidak lagi akurat sehingga menyebabkan adanya ketidakpastian model (*model uncertainty*). Meski demikian, dari perspektif seorang desainer kontrol/insinyur, sistem tersebut akan lebih mudah untuk dirancang sistem kontrolnya (dibandingkan sistem yang kompleks).

Model sistem pendulum terbalik beroda satu (gambar 1) dapat diturunkan dengan menggunakan metode Euler-Lagrange yakni melalui pendekatan konsep energi (Greenwood, 2006). Dengan menggunakan hasil penurunan model pada *unicycle robot* (Ho et al., 2014) dan dengan sedikit modifikasi untuk menyesuaikan parameter-parameter sistemnya, maka persamaan sistemnya dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l_r m_b \cos \alpha \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{4}l^2 m_b + I_{by}\right)\ddot{\alpha} &= \frac{1}{2}m_b g l \sin \alpha, \\ (m_w l_r^2 + m_b l_r^2 + I_{wy})\ddot{\theta} + \frac{1}{2}l_r m_b \cos \alpha \ddot{\alpha} &= \frac{1}{2}m_b l_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + T, \end{aligned} \quad (1)$$

dengan simbol-simbol yang digunakan diberikan dalam Tabel 1.

Dari penelusuran referensi yang ada, diperoleh bahwa sistem model dalam persamaan (1) cukup mirip dengan persamaan *cart-pole system* yang dibahas oleh Olfati-Saber, 1999) meskipun konstruksi *cart-pole system* dan *one-wheeled*



Gambar 1: Model Pendulum Terbalik Beroda Satu (lihat Kausar et al., 2012).

inverted pendulum system adalah berbeda. Untuk itu dalam penelitian ini, analisis sistem *underactuated* yang dibahas oleh Olfati-Saber, 1999 akan digunakan dalam penerapan keseimbangan sistem pendulum terbalik beroda satu, khususnya dalam perancangan sistem kendali *sliding mode control* untuk keseimbangan sistem tersebut.

1.2. Underactuated system

Underactuated system merupakan sistem dimana jumlah aktuator sistem lebih sedikit dibandingkan derajat kebebasannya. Sebagai contoh, pada sistem pendulum terbalik beroda satu hanya ada satu aktuator berupa dc motor pada bagian rodanya sedangkan sistem tersebut mempunyai lebih dari satu derajat kebebasan. Dalam *teorema decoupled system* (Olfati-Saber dan Megretski, 1998) telah dirumuskan konsep transformasi koordinat sistem dari persamaan dinamikanya menjadi bentuk normalnya.

Tabel 1: Simbol dan Parameter Sistem

α	posisi sudut dari pendulum relatif terhadap sumbu-z (dalam $^{\circ}$).
θ	besaran sudut atau putaran roda (dalam $^{\circ}$).
l	jari-jari roda (0.56 m).
l_r	jarak (panjang) antara titik pusat roda ke titik pusat massa pendulum (0.053 m).
m_w	massa roda (0.225 kg).
m_b	massa pendulum (6.014 kg).
I_{wy}	inersia dari roda terhadap sumbu-y (0.000316 $kg.m^2$).
I_{by}	inersia pendulum terhadap sumbu-y (0.1677 $kg.m^2$).
g	percepatan gravitasi (6.81 $m.s^{-2}$).
T	torsi atau (<i>torque</i>) dari aktuator dc motor (dalam $N.m$).

Teorema decoupled system: Asumsikan bahwa persamaan suatu sistem dapat dituliskan kedalam bentuk berikut,

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_1 &= f_1(q, p) + g_1(q_2)u, \\ \dot{q}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_2 &= f_2(q, p) + g_2(q_2)u,\end{aligned}\tag{2}$$

dimana $q = (q_1, q_2) \in R^2$, $p = (p_1, p_2) \in R^2$, dengan u sebagai input. $f_1(q, p)$, $f_2(q, p)$, $g_1(q_2)$, dan $g_2(q_2) > 0$ dengan $\forall q_2 \in R$. Selain dari itu, f_i dan g_i dengan $i = 1, 2$ merupakan fungsi yang smooth yang dapat diturunkan. $(q, p) = (0, 0)$ merupakan titik keseimbangan (*equilibrium*) dari sistem. Berikutnya, dengan menggunakan pengubah koordinat global berikut:

$$\begin{aligned}z_1 &= q_1 - \int_0^{q_2} g_1(s)/g_2(s)ds, \\ z_2 &= p_1 - g_1(q_2)/g_2(q_2)p_2, \\ \zeta_1 &= q_2, \\ \zeta_2 &= p_2,\end{aligned}\tag{3}$$

maka sistem dapat dibuat *decoupled* menjadi subsystem (q_1, p_1) dan subsystem (q_2, p_2) relatif terhadap u . Dalam koordinat yang baru, diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(z, \zeta_1), \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= v,\end{aligned}\tag{4}$$

dimana $v = f_2(q, p) + g_2(q_2)u$, sedangkan $z = (z_1, z_2)^T$. Dengan demikian, melalui transformasi koordinat (3), persamaan sistem (2) bisa diubah kedalam bentuk normalnya (4).

1.3. Sliding Mode Control

Konsep *sliding mode control* dapat diberikan dalam contoh sederhana sebagaimana yang dijelaskan oleh Khalil, 2010. Diberikan sebuah persamaan sistem nonlinier berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u,\end{aligned}\tag{5}$$

dimana $f(x)$ adalah fungsi yang memiliki ketidaktentuan (*uncertain*), x merupakan variabel state, u adalah kontrol input, sedang $g(x)$ adalah suatu fungsi nonlinear yang memiliki batas (*bounded*).

Berikutnya, apabila s didefinisikan sebagai *sliding manifold*, yakni dengan menggunakan pers. (5), dituliskan

$$s = ax_1 + \dot{x}_1 = 0.\tag{6}$$

Dari persamaan (6) diperoleh turunan

$$\dot{s} = ax_2 + h(x) + g(x)u. \quad (7)$$

Apabila h dan g diasumsikan memenuhi ketidaksamaan (*inequality*) berikut,

$$\left| \frac{ax_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x), \forall x \in R^2 \quad (8)$$

dengan $\varrho(x)$ adalah suatu fungsi yang diketahui, maka dengan menggunakan fungsi Lyapunov kandidat berikut:

$$V = \frac{1}{2}s^2, \quad (9)$$

diperoleh

$$\dot{V} = s\dot{s}. \quad (10)$$

Selanjutnya, u dapat didesain menjadi

$$u = -\beta(x) \operatorname{sgn}(s) \quad (11)$$

dimana

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ -1, & s < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Dari persamaan (11), apabila $\beta(x)$ dipilih sedemikian rupa sehingga memenuhi pertidaksamaan: $\beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0$ dengan $\beta_0 > 0$, maka persamaan sistem (5) dapat distabilkan dengan mendesain kontrol input u .

II. METODE PENELITIAN

2.1. Bentuk Normal Sistem

Persamaan dinamika sistem pada pers. (1) dapat dituliskan kembali kedalam bentuk persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ll_r m_b \cos q_2 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{4}l^2 m_b + I_{by}\right)\ddot{q}_2 &= \frac{1}{2}m_b g l \sin q_2, \\ (m_w l_r^2 + m_b l_r^2 + I_{wy})\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}ll_r m_b \cos q_2 \ddot{q}_2 &= \frac{1}{2}m_b ll_r \dot{q}_2^2 \sin q_2 + T, \end{aligned} \quad (13)$$

dimana $q_1 = \theta$ dan $q_2 = \alpha$. Dengan menyederhanakan persamaan (13), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{(8I_{by} + 2l^2 m_b)T - 2gl^2 l_r m_b^2 \cos q_2 \sin q_2 + ll_r m_b \sin q_2 (4I_{by} + l^2 m_b) \dot{q}_2^2}{2l^2 m_b (I_{wy} + l_r^2 m_w) + 8I_{by} (I_{wy} + l_r^2 (m_b + m_w)) + 2l^2 l_r^2 m_b^2 \sin^2 q_2}, \\ \ddot{q}_2 &= \frac{-4ll_r m_b \cos q_2 T + l m_b \sin q_2 (4gI_{wy} + 4gl_r^2 (m_b + m_w) - 2ll_r^2 m_b \cos q_2 \dot{q}_2)}{2l^2 m_b (I_{wy} + l_r^2 m_w) + 8I_{by} (I_{wy} + l_r^2 (m_b + m_w)) + 2l^2 l_r^2 m_b^2 \sin^2 q_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Apabila \ddot{q}_2 dan T masing-masing diberikan oleh $\ddot{q}_2 = u$ dan

$$T = \left(m_b l \tan q_2 (2gI_{wy} + l_r^2 (2g(m_b + m_w) - lm_b \cos q_2 \dot{q}_2^2)) \right. \\ \left. - 4I_{by} (I_{wy} + l_r^2 (m_b + m_w)) / \cos q_2 \right. \\ \left. - l^2 m_b (I_{wy} + l_r^2 (\sin^2 q_2 m_b + m_w)) u / \cos q_2 \right) / 2ll_r m_b, \quad (15)$$

sedangkan $p_1 = \dot{q}_1$, dan $p_2 = \dot{q}_2$. Dengan memasukkan nilai-nilai \ddot{q}_2 , T , p_1 dan p_2 kedalam persamaan (14), maka persamaan (13) dapat dituliskan kedalam bentuk lain sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_1 &= a \tan q_2 - b u / \cos q_2, \\ \dot{q}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_2 &= u, \end{aligned} \quad (16)$$

dimana $a = g/l_r$, dan $b = (l/2l_r + 2I_{by}/ll_r m_b)$ dengan $\cos q_2 \neq 0$.

Dengan menggunakan transformasi koordinat (Olfati-Saber dan Megretski, 1998) berikut

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 + a\gamma(q_2) \\ z_2 &= p_1 + bp_2 / \cos q_2 \end{aligned} \quad (17)$$

dengan $\gamma(q_2) = \int_0^{q_2} \frac{1}{\cos(\rho)} d\rho = \ln \left(\frac{1+\tan(q_2/2)}{1-\tan(q_2/2)} \right)$, maka diperoleh bentuk normal sistem (1) menjadi

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \tan q_2 (a + bp_2^2 / \cos q_2), \\ \dot{q}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_2 &= u. \end{aligned} \quad (18)$$

2.2. Desain Sliding Mode Control

Langkah pertama dalam mendesain *sliding mode control* adalah dengan mendefinisikan *sliding manifold* s sebagai berikut

$$s = k(z_2 + z_1) + (p_2 + q_2) = 0, \quad (19)$$

dimana $k > 0$. Dengan menggunakan pers. (16)-(18), kemudian memasukkannya kedalam turunan dari (19), diperoleh

$$\dot{s} = u + kp_1 + p_2 + bkp_2 / \cos q_2 + ak \tan q_2 + bkp_2^2 \sec q_2 \tan q_2. \quad (20)$$

Apabila v dan $h(q_2, p_2)$ merupakan fungsi-fungsi yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} u &= v - kp_1 - p_2, \\ h(q_2, p_2) &= bkp_2 / \cos q_2 + ak \tan q_2 + bkp_2^2 \sec q_2 \tan q_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Dengan menggunakan pers. (21), maka (20) dapat ditulis

$$\dot{s} = v + h(q_2, p_2). \quad (22)$$

Berdasarkan hubungan pertidaksamaan berikut

$$|h(q_2, p_2)| \leq k(a + bp_2 + bp_2^2)(|q_2| + 1), \quad (23)$$

dan dengan mendefinisikan

$$\beta(p_2, q_2) = k(a + bp_2 + bp_2^2)(|q_2| + 1) + \beta_0, \text{ dengan } \beta_0 > 0, \quad (24)$$

selanjutnya, dengan menggunakan kembali peubah: $p_1 = \dot{\theta}$, $q_2 = \alpha$ dan $p_2 = \dot{\alpha}$, maka diperoleh rancangan kontrol *controller laws* sebagai berikut

$$u = -k\dot{\theta} - \dot{\alpha} - \beta(\alpha, \dot{\alpha}) \text{sign}(s), \quad (25)$$

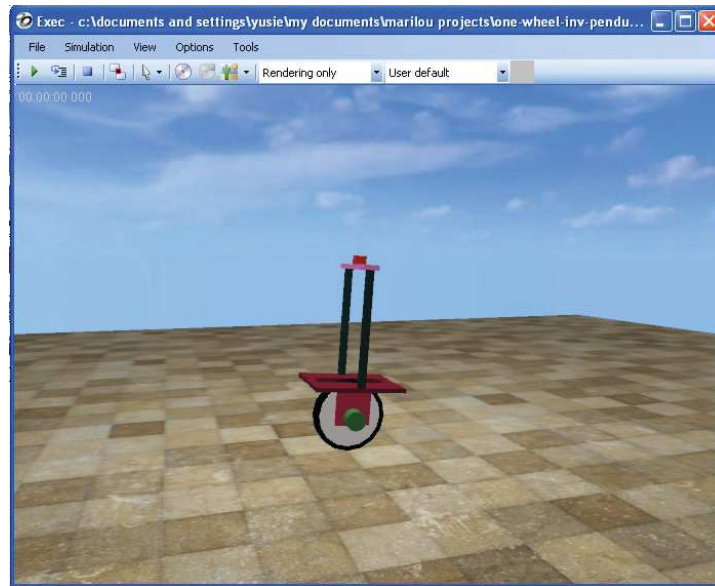
yakni persamaan umpan-balik sistem pendulum terbalik beroda satu. Untuk menghindari efek *chattering* pada pers. (25), fungsi $\text{sign}(s)$ dapat digantikan dengan fungsi $\text{sat}(s)$ (Utkin, 1992).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil perancangan sistem kontrol menggunakan *sliding mode control* (subbagian 2.2) diperoleh *controller laws* yang digunakan sebagai kontrol input untuk menyeimbangkan sistem pendulum terbalik beroda satu. Dalam pers. (25) menggunakan umpan-balik sejumlah *state* yang meliputi $[\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}]$ dan ini berarti diperlukan sejumlah sensor untuk mengukur masing-masing *state* tersebut. Dalam prakteknya, pengukuran $(\theta, \dot{\theta})$ dilakukan menggunakan enkoder motor, sedangkan $(\alpha, \dot{\alpha})$ dilakukan menggunakan sensor IMU.

Implementasi *controller law* dalam pers. (25) dilakukan dengan program simulasi berbasis ODE (*Open Dynamics Engine*) melalui Marilou Anykode. Tampilan fisik dari sistem pendulum terbalik beroda satu ini telah dirancang dan ditunjukkan pada gambar 2. Sejumlah sensor dan aktuator yang diperlukan oleh sistem, seperti sensor IMU, enkoder motor, dan dc motor telah disediakan secara lengkap dalam fitur Marilou Anykode. Enkoder motor diletakkan persis pada bagian titik pusat roda yang menyatu dengan posisi dc motor, sedangkan sensor IMU diposisikan melekat pada ujung pendulum bagian atas. Dalam implementasinya, *user* (pengguna) dapat menuliskan kode program C/C++ dilingkungan Visual C++ 2008 untuk menerapkan pers. (25) dengan memasukkan parameter sistem sebagaimana diberikan pada Table 1.

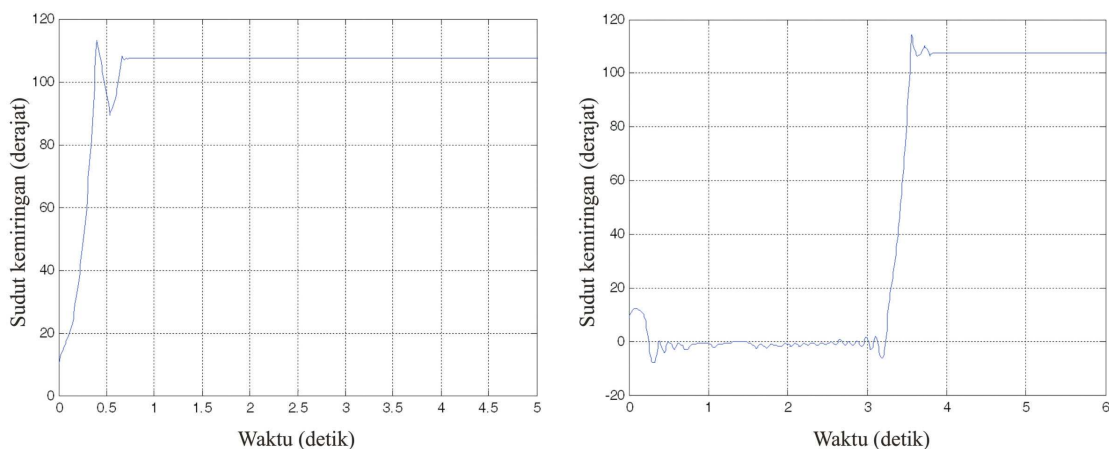
Untuk melihat apakah simulasi sistem yang ditunjukkan pada gambar 2 ini sesuai dengan kondisi nyatanya (*real world*), maka pengujian dilakukan dengan percobaan melalui cara menyimpang pendulum dalam arah *longitudinal* dengan sudut awal tertentu. Dari percobaan yang telah dilakukan, diperoleh bahwa apabila pendulum disimpangkan dalam sudut $+X$ maka pendulum akan jatuh pada arah $+X$ sebagaimana ditunjukkan pada gambar 3 (kiri). Selanjutnya



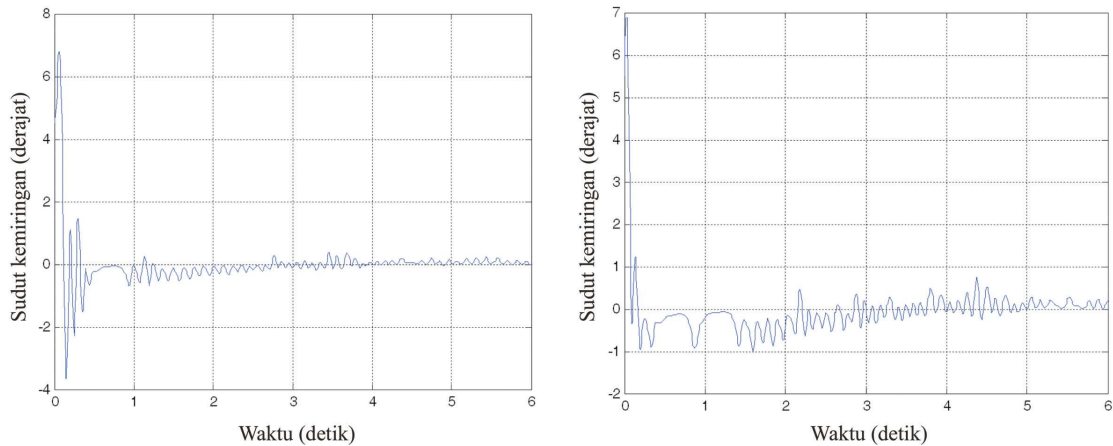
Gambar 2: Simulasi Berbasis ODE untuk Sistem Pendulum Terbalik Beroda Satu.

dalam percobaan yang lain, telah dilakukan pengujian untuk melihat respons sistem apabila sistem belum stabil sebagaimana ditunjukkan pada gambar 3 (kanan).

Berikutnya, dengan melakukan *tuning* terhadap gain kontrolnya secara *trial* dan *error*, mulai dari posisi sudut awal setimbang (0°) hingga menyimpang beberapa derajat dari titik kesetimbangannya, sistem diamati apakah bisa stabil atau belum. Dari hasil percobaan yang telah dilakukan, sistem pada akhirnya bisa distabilkan sebagaimana ditunjukkan pada gambar 4. Pada gambar 4 (kiri), pendulum disimpangkan dengan sudut awal 4.5° dalam arah *longitudinal* $+X$, sedangkan pada gambar kanan, sistem disimpangkan sejauh 5.5° . Dari



Gambar 3: Simulasi sistem dengan sudut awal tanpa kontrol (kiri), dan sistem dengan sudut awal dengan kontrol namun belum stabil (kanan).



Gambar 4: Hasil simulasi dengan sudut awal 4.5° (kiri) dan 5.5° (kanan).

hasil simulasi tersebut, pendulum terlihat akan selalu menuju ke arah posisi keseimbangannya (*equilibrium point*), yakni 0° . Video demonstrasi simulasi berbasis ODE ini dapat dilihat pada alamat https://youtu.be/i_9LGyGG2Is. Dalam video tersebut ditunjukkan dua performa sistem baik yang belum stabil dan sudah stabil.

IV. KESIMPULAN

Dalam artikel ini dibahas persoalan sistem kontrol keseimbangan sistem pendulum terbalik beroda satu dengan menggunakan metode kontrol *sliding mode control*. Simulasi 3D berbasis ODE yang dibuat melalui Marilou Anycode cukup sesuai sehingga bisa dijadikan sebagai *testbed* untuk menguji performa sistem kontrol. Pengujian dengan masukan sudut awal berbeda telah dilakukan pada sistem, dan sistem berhasil distabilkan yang ditandai dengan posisi pendulum yang konvergen pada titik kesetimbangannya. Berdasarkan simulasi tersebut ditunjukkan performa *sliding mode control* dalam mengendalikan sistem pendulum terbalik beroda satu. Dengan menghilangkan kompleksitas dan persamaan matematis (nonlinearitas) yang rumit dalam penelitian ini, luaran penelitian ini berupa video demonstrasi sistem kontrol bisa digunakan sebagai materi bahan ajar untuk memperkenalkan konsep *closed-loop* sistem kontrol, khususnya bagi mahasiswa program diploma di Politeknik Negeri Banjarmasin.

DAFTAR PUSTAKA

- Greenwood, D. T. (2006). *Advanced dynamics*. Cambridge University Press.
- Ho, M.-T., Rizal, Y., dan Chen, Y.-L. (2014). Balance control of a unicycle robot. dalam *23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, hal. 1186–1191.

- Kausar, Z., Stol, K., dan Patel, N. (2012). Nonlinear control design using lyapunov function for two-wheeled mobile robots. dalam *Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP), 2012 19th International Conference*, hal. 123–128. IEEE.
- Khalil, H. K. (2010). *Nonlinear Systems*. Pearson Education Taiwan Ltd, 3 edition.
- Nurmahaludin (2012). Analisis kontrol sistem pendulum terbalik menggunakan regulator kuadratik linear. *Intekna*, 12:51–57.
- Olfati-Saber, R. (1999). Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole system and the rotating pendulum. dalam *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 2, hal. 1174–1181. IEEE.
- Olfati-Saber, R. dan Megretski, A. (1998). Controller design for a class of underactuated nonlinear systems. dalam *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 4, hal. 4182–4187. IEEE.
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media.